

11. Proporcije i procentni račun

11.1. Proporcionalnost veličina

- Dve veličine x i y su direktno proporcionalne ako postoji realan broj $k, k \neq 0$ takav da je $y = k \cdot x \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k$. Broj k zove se koeficijent (direktna) proporcionalnosti.

- Dve veličine x i y su obrnuto proporcionalne ako postoji realan broj $k, k \neq 0$ takav da je $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow x \cdot y = k$. Broj k se zove koeficijent obrnute proporcionalnosti.

- Ako su $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dva para direktno proporcionalnih veličina (tj. postoji realan broj k takav da je $\frac{y_1}{x_1} = k$ i $\frac{y_2}{x_2} = k$), onda važi jednakost

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

(Ova jednakost nazivamo direktna produžena proporcija i kažemo da se veličina x_1 prema veličini x_2 odnosi isto kao y_1 prema y_2 . U navedenoj proporciji x_2 i y_1 se zovu unutrašnji članovi, a x_1 i y_2 spoljašnji.

- Ako su $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dva para obrnuto proporcionalnih veličina (tj. postoji realan broj k takav da je $x_1 y_1 = k$ i $x_2 y_2 = k$), onda važi jednakost proporcije i kažemo da se veličina x_1 prema veličini x_2 odnosi obrnuto od veličine y_1 prema veličini y_2 .

- (Osobine produžene proporcije)

1. Proizvod spoljašnjih članova proporcije jednak je proizvodu unutrašnjih članova, tj.

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

2. U svakoj proporciji unutrašnji članovi mogu da zamene mesta, tj.

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow x_1 : y_1 = x_2 : y_2$$

3. U svakoj proporciji spoljašnji članovi mogu da zamene mesta, tj.

$$x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow y_2 : x_2 = y_1 : x_1$$

4. U sumnoj proporciji i spoljašnji i unutrašnji članovi mogu da zamene mesta, tj. $x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow y_2 : y_1 = x_2 : x_1$

5. Unutrašnji članovi mogu da zamene mesta sa spoljašnjim i spoljašnji sa unutrašnjim, tj. $x_1 : x_2 = y_1 : y_2 \Leftrightarrow x_2 : x_1 = y_2 : y_1$

u 1. $(a, b) = (-2, -6) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \quad a \cdot b = 12$

$$(a, b) = (1, 3) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}, \quad a \cdot b = 3$$

a i b su direktno proporcionalne. $k = \frac{1}{3}$

$$\frac{a}{b} = k = \frac{1}{3} \quad 3a = b$$

a	-2	-1	1	2	5	$\frac{10}{3}$
b	-6	-3	3	6	15	10

2. $(x, y) = (1, 12) \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{12}, \quad x \cdot y = 12$

$$(x, y) = (3, 4) \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \quad x \cdot y = 12$$

na x i y su obrnuto proporcionalne. $k = 12$

$$x \cdot y = 12$$

$$x = \frac{12}{y}$$

tj.

x	1	2	3	6	8	24
y	12	6	4	2	1,5	0,5

3. $3x + 4x = 560$

$$7x = 560$$

$$x = 80$$

$$\text{Br. devojčica je } 3x = 240$$

$$\text{Br. dečaka je } 4x = 320$$

$$x : (560 - x) = 3 : 4$$

$$4x = 3 \cdot (560 - x)$$

$$4x = 1680 - 3x$$

$$7x = 1680$$

$$x = 240$$

$$560 - x = 320$$

$$3x + 4x + 6x = 468$$

$$13x = 468$$

$$x = 36$$

$$3x = 108$$

$$4x = 144$$

$$6x = 216$$

$$a) G : S = 120 : x$$

$$6x = 600$$

$$x = 100$$

$$b) G : S = 14 : 17$$

$$54 = 102$$

$$14 = 20,4$$

$$12 : 145,2 = 5 : x \quad x = 60,5$$

$$12x = 726$$

$$7. \quad k = 15. \quad pt = 120t$$

$$x \cdot 5t = 120t$$

$$x = 24$$

$$8. \quad k = 6 \cdot 20 \cdot 10 = 1200$$

$$15 \cdot 8 = 120 \text{ sati}$$

$$120x = 1200$$

$$x = 10$$

$$9. \quad t_1 = 3h \quad 15 \text{ min} = \frac{13}{4} h$$

$$v_1 = 60 \text{ km/h}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 195 \text{ km}$$

$$v_2 = 75 \text{ km/h}$$

$$s_2 = 195 \text{ km}$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2$$

$$t_2 = 2,6 h = 2h \quad 36 \text{ min}$$

$$10. \quad a) \quad 1:200 = 3:x$$

$$x = 600 \text{ cm}$$

$$x = 6 \text{ m}$$

$$b) \quad 50 \text{ m} = 5000 \text{ cm}$$

$$1:200 = x:5000$$

$$200x = 5000$$

$$x = 25 \text{ cm}$$

11.2. Procentui račun

- Procent predstavlja 100-ti deo posmatrane veličine.

- Broj P koji predstavlja p% veličine G dobija se iz proporcije

$$G:100 = P:p \quad \text{i iznosi} \quad P = G \cdot \frac{p}{100}$$

- Izraz G se naziva glavnica, a P procentui prima.

Ako je stara cena S povećana za $p = 17\%$, tada nova cena N se dobija kao $N = S \cdot 1,17 = S \cdot \left(1 + \frac{17}{100}\right) = S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S \cdot r$, a promena cene $N - S$ dobija se kao $N - S = S \cdot 0,17$. e)

Ako se stara cena smanjila za $p = 17\%$, tada nova cena N se dobija kao $N = S \cdot 0,83 = S \cdot \left(1 - \frac{17}{100}\right) = S \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = S \cdot r$, a promena cene $S - N$ dobija se kao $S - N = S \cdot 0,17$. f)

Ako je $r > 1$ onda je poskupljenje, a ako je $r < 1$ onda je pojeftinjenje.

1. a) $G = 600$

$p = 12$

$600 : 100 = P : 12$

I. $G : G_1 = 100 : 112$

II. $N = S \cdot r$

$P = 72$

$112G = 100G_1$

$N = 600 \cdot 1,12$

$G_1 = G + P = 672$

$G_1 = 672$

$N = 672$

1) $G_1 = \frac{106G}{100} = \frac{106 \cdot 600}{100} = 636$

$N = 600 \cdot 1,06 \cdot 1,06 = 674,16$

$G_2 = \frac{106G_1}{100} = \frac{106 \cdot 636}{100} = 674,16$

$G_1 = \frac{106G}{100} = \frac{106 \cdot 600}{100} = 636$

$N = 600 \cdot 1,06 \cdot 0,94 = 597,84$

$G_2 = \frac{94G_1}{100} = \frac{94 \cdot 636}{100} = 597,84$

$G_1 = \frac{94G}{100} = \frac{94 \cdot 600}{100} = 564$

$N = 600 \cdot 0,94 \cdot 1,06 = 597,84$

$G_2 = \frac{106G_1}{100} = \frac{106 \cdot 564}{100} = 597,84$

i) e) $G : G_1 = 88 : 100$

$88 G_1 = 100 G$

$G_1 = \frac{100 G}{88} = \frac{100 \cdot 600}{88}$

$G_1 = 681,82$

$S = N \cdot 0,88$

$N = \frac{S}{0,88} = \frac{600}{0,88}$

$N = 681,82$

f) $G = 600$ $G : P = 100 : p$

$P = 90$

$Gp = 100P$

$p = \frac{100P}{G}$

$p = \frac{100 \cdot 90}{600}$

$p = 15\%$

$N = S \cdot r$

$r = \frac{N}{S} = \frac{690}{600}$

$p = 15\%$

12. $160 : 100 = 20 : p$

$160 p = 2000$

$p = \frac{2000}{160} = 12,5\%$

$N = S \cdot r$

$r = \frac{N}{S} = \frac{180}{160}$

$r = 1,125$

$p = 12,5\%$

13. $150 + 30 + 20 = 200g$

$200 : 100 = 20 : p$

$200p = 2000$

$p = 10\%$

$r = \frac{20}{200} = 0,10$

$p = 10\%$

14. $x : 100 = 300 : 15$

$15x = 30000$

$x = 2000 \text{ kg}$

$\frac{3000}{0,15} = 20000$

$$5 \quad C = 100\%$$

$$C_1 = C + 30\% \cdot C = 100\% + \frac{30}{100} \cdot 100\% = 100\% + 30\% = 130\%$$

$$C_2 = C_1 - 20\% \cdot C_1 = 130\% - \frac{20}{100} \cdot 130\% = 130\% - 26\% = 104\%$$

Knjiga je skuplja za $x = 104\% - 100\% = 4\%$

$$1,30 \cdot 0,80 = 1,04$$

$p = 4\%$ postupljenije

$$16. \quad C_1 = C_2 - 25\% \cdot C_2 = C_2 - \frac{25}{100} \cdot C_2 = C_2 - \frac{1}{4} C_2 = \frac{3}{4} C_2$$

$$C_2 = \frac{4}{3} C_1 = C_1 + \frac{1}{3} C_1 = 33,33\% \cdot C_1$$

$$C_1 = 0,75 C_2$$

$$C_2 = \frac{C_1}{0,75} = C_1 \cdot 1,3333 \dots$$

$$p = 33,33\%$$

$$17. \quad C_2 = C_1 + 25\% \cdot C_1 = C_1 + \frac{25}{100} C_1 = C_1 + \frac{1}{4} C_1 = \frac{5}{4} C_1$$

$$C_2 - \frac{p}{100} C_2 = C_1$$

$$\frac{100-p}{100} C_2 = C_1$$

$$\frac{100-p}{100} \cdot \frac{5}{4} C_1 = C_1$$

$$\frac{5(100-p)}{400} = 1$$

$$500 - 5p = 400$$

$$5p = 100$$

$$p = 20$$

$$1,25 \cdot r = 1$$

$$r = \frac{1}{1,25}$$

$$r = 0,8$$

$$p = 20\%$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad G: 100 &= 40:8 & G: 100 &= 55:10 & r &= \frac{55 \cdot 0,08}{40} = 1,11 \\
 8G &= 4000 & 8p &= 5500 & p &= 11\% \\
 G &= 500 & p &= \frac{5500}{G} \\
 & & p &= \frac{5500}{500} \\
 & & p &= 11\%
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad G_1 + 50\% \cdot G_1 &= G_1 + \frac{50}{100} G_1 = G_1 + \frac{1}{2} G_1 = \frac{3}{2} G_1 \\
 \frac{3}{2} G_1 - 50\% \cdot \frac{3}{2} G_1 &= \frac{3}{2} G_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} G_1 = \frac{3}{2} G_1 - \frac{3}{4} G_1 = \frac{3}{4} G_1 \\
 G_2 - 50\% \cdot G_2 &= G_2 - \frac{50}{100} G_2 = G_2 - \frac{1}{2} G_2 = \frac{1}{2} G_2 \\
 \frac{1}{2} G_2 + 50\% \cdot \frac{1}{2} G_2 &= \frac{1}{2} G_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} G_2 = \frac{1}{2} G_2 + \frac{1}{4} G_2 = \frac{3}{4} G_2 \\
 \frac{3}{4} G_1 - \frac{3}{4} G_2 &= 6 \\
 \frac{3}{4} (G_1 - G_2) &= 6 \\
 G_1 - G_2 &= 6 \cdot \frac{4}{3} = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 \cdot 1,5 \cdot 0,5 &= 0,75 c_1 & 0,75 c_1 - 0,75 c_2 &= 6 \\
 c_2 \cdot 0,5 \cdot 1,5 &= 0,75 c_2 & c_1 - c_2 &= \frac{6}{0,75} \\
 & & c_1 - c_2 &= 8
 \end{aligned}$$

11. 3. Zadaci za vežbu

$$\begin{aligned}
 1k + 3k + 5k &= 180 & 1k &= 20^\circ \\
 9k &= 180 & 3k &= 60^\circ \\
 k &= 20 & 5k &= 100^\circ
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (x, y) = (2, 12) \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{6}, \quad xy = 24$$

$$(x, y) = (6, 4) \quad \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \quad xy = 24$$

x e y su obrnuto proporcionalne. $k = 24$

$$b = \frac{k}{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$a = \frac{k}{x} = \frac{24}{2} = 12$$

$$c = \frac{k}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

$$(x, y) = (36, 12) \quad \frac{x}{y} = 3, \quad xy = 432$$

$$(x, y) = (9, 3) \quad \frac{x}{y} = 3, \quad xy = 27$$

x e y su direktno proporcionalne. $k = 3, \quad x = 3y$

$$b = \frac{24}{k} = \frac{24}{3} = 8$$

$$a = 2k = 2 \cdot 3 = 6$$

$$V = 320$$

$$a = 2k = 4$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$b = 4k = 8$$

$$2k \cdot 4k \cdot 5k = 320$$

$$c = 5k = 10$$

$$40k^3 = 320$$

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$k^3 = 8$$

$$P = 2(32 + 80 + 40)$$

$$k = 2$$

$$P = 2 \cdot 152$$

$$P = 304$$

$$5. \quad \begin{array}{cc} 20 \text{ kg} & 3 \\ x & 20 \end{array} \quad x = \frac{20 \cdot 20}{3}$$

$$x = 133,3 \text{ kg}$$

$$6. \quad \begin{array}{ccc} 1 & 20 & 220 \text{ l} \\ 3 & x & 120 \text{ l} \end{array} \quad x = \frac{20 \cdot 220}{120} \cdot 3$$

$$x = 110$$

$$7. \quad \begin{array}{cc} 150 \text{ g} & 50 \text{ g} \\ 200 \text{ g} & 50 \text{ g} \end{array}$$

$$p = \frac{50}{200} \cdot 100$$

$$p = 25\%$$

$$8. \quad \begin{array}{cc} 200 & 240 \end{array}$$

$$\frac{240}{200} \cdot 100 = 120\%$$

$$p = 20\%$$

$$9. \quad r = 1,15 \cdot 1,10 = 1,265$$

$$p = 26,5\%$$

$$10. \quad 9840$$

$$c_1 = 1,2 \quad c_2$$

$$c_2 = 3000$$

$$c_3 = 0,9 c_1 = 1,08 c_2$$

$$c_3 = 1,08 \cdot 3000$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 9840$$

$$c_3 = 3240$$

$$1,2 c_2 + c_2 + 1,08 c_2 = 9840$$

$$3,28 c_2 = 9840$$

$$11. \quad r = 1,3 \cdot 0,8 = 1,04$$

4% ueda wrodzist

$$2. \quad \begin{array}{ccc} 15 & 10t & 6 \text{ dnia} \\ \times & 15t & 3 \text{ dnia} \end{array}$$

$$x \cdot 15 \cdot 3 = 15 \cdot 10 \cdot 6$$

$$x = \frac{60}{3}$$

$$x = 20$$

$$13. \quad 0,80 : r = 0,5$$

$$r = \frac{0,5}{0,8}$$

$$r = 62,5$$

$$p = 37,5\%$$

$$4. \quad \begin{array}{cc} 250 & 200 \end{array}$$

$$0,90 \quad r$$

$$200r = 250 \cdot 0,9$$

$$r = \frac{225}{200}$$

$$r = 1,125$$

$$p = 12,5\%$$

$$5. \quad \begin{array}{ccc} 10 & 5 \text{ dnia} & 6h \\ 15 & 4 \text{ dnia} & x \end{array}$$

$$x \cdot 4 \cdot 15 = 10 \cdot 5 \cdot 6$$

$$x = \frac{300}{60}$$

$$x = 5$$

$$16. \quad 0,88 \cdot r = 1$$

$$r = \frac{1}{0,88}$$

$$r = 1,1363$$

$$p = 13,63\%$$

$$17. \quad a \cdot b = 1$$

$$1,10 \cdot 0,91 = 0,991$$

$$p = 1\% \text{ - suma ni se za 1\%}$$

$$18. \quad \begin{array}{l} 1 \\ \times \end{array} \quad \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} = x \cdot y$$

$$y = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{x}{1}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{x}} = \frac{4}{3} \cdot x$$

$$y = 0,75x$$

$$p = 25\%$$

$$19. \quad 10:88 = x:12$$

$$x = \frac{120}{88}$$

$$x = 1,36 \text{ kg}$$



$$10. \quad 1:150 = x:30 \text{ m}$$

$$x = \frac{30}{150}$$

$$x = 0,2 \text{ m}$$

$$11. \quad 1:x = 8:4000$$

$$x = \frac{4000}{8}$$

$$x = 500$$

Razmera je 1:500.

2. Realne funkcije - granične vrednosti i izvodi

2.1. Osnovni pojmovi o preslikavanju

Ako svakom elementu skupa A (originalima) dodelimo (pridružimo) tačno jedan element skupa B (slike) kažemo da smo izvršili preslikavanje skupa A u skup B. Skup A je domena, skup B kodomen preslikavanja (funkcije).

Neka funkcija f preslikava skup A u skup B ($f: A \rightarrow B$). Ovo preslikavanje je injektivno ("1-1"), ako svakoj slici odgovara jedan original. Posmatrano preslikavanje je surjektivno ("na"), ako se svi elementi skupa B pojavljuju kao slike.

$$a) \quad x^2 + y^2 = 2$$

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$y_1 = \sqrt{2 - x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{2 - x^2}$$

$$D: \quad 2 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 \leq 2$$

$$x \in D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$K: \quad y_1 \in [0, \sqrt{2}]$$

$$y_2 \in [-\sqrt{2}, 0]$$