26. $a_1 = \frac{1}{\log_3 5} = \log_5 3$

$a_2 = \frac{1}{\log_6 5} = \log_5 6$

$a_3 = \frac{1}{\log_x 5} = \log_5 x$

$2a_2 = a_1 + a_3$

$2\log_5 6 = \log_5 3 + \log_5 x$

$\log_5 6^2 = \log_5 (3x)$

$\log_5 36 = \log_5 (3x)$

$3x = 36$

$x = 12$

10. Matematička indukcija i kombinatorika

10.1. Matematička indukcija

- Ako za neko tvrđenje $T(n)$, $n \in N$ važi:

1) $T(1)$ je tačno

2) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ je tačno za svako $n = 1, 2, \ldots$

tada je tvrđenje $T(n)$ tačno za svako $n \in N$

- Uopštenje 1:

Ako za neko tvrđenje $T(n)$, $n \geq k$, $n, k \in N$, važi:

1) $T(k)$ je tačno,

2) $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ je tačno za svako $n = k, k+1, \ldots$,

tada je tvrđenje $T(n)$ tačno za svako $n \geq k$.

- Uopštenje 2:

Ako za neko tvrđenje $T(n)$, $n \in N$, važi:

1) $T(1), T(2), \ldots, T(k)$ je tačno,

2) $T(n-k+1), \ldots, T(n-1), T(n) \Rightarrow T(n+1)$ je tačno za svako $n = k, k+1, \ldots$,

tada je tvrđenje $T(n)$ tačno za svako $n \in N$.

1. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n\in N$

$T(1)$: $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

$1=\frac{6}{6}$

$1=1$ T

$T(n+1)$ $1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$ $*$

$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$

$=\frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}$

$=\frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6}$

$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}}$ $*$

2. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $\forall n\in N$

$T(1)$ $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$

$1=\frac{1\cdot 4}{4}$

$1=1$ T

$T(u+1)$: $1^3+\dots+u^3+(u+1)^3=\frac{(u+1)^2(u+2)^2}{4}$ $*$

$$1^3+\dots+u^3+(u+1)^3=\frac{u^2(u+1)^2}{4}+(u+1)^3$$

$$=\frac{u^2(u+1)^2+4(u+1)^3}{4}$$

$$=\frac{(u+1)^2(u^2+4(u+1))}{4}$$

$$=\frac{(u+1)^2(u^2+4u+4)}{4}$$

$$=\frac{(u+1)^2(u+2)^2}{4} \; *$$

. u^3+3u^2+5u+3, deljivo sa 3 $\forall u\in N$

$u^3+3u^2+5u+3=u^3+5u+3(u^2+1)$

$3(u^2+1)$ je deljivo sa 3

$T(u) \Leftrightarrow u^3+5u$, deljivo sa 3 $\forall u\in N$

$T(1)$: $1^3+5\cdot1=6=3\cdot2$

$(u+1)$: $(u+1)^3+5(u+1)=u^3+3u^2+3u+1+5u+5$

$$=(u^3+5u)+(3u^2+3u+6)$$

rvi sabirak je deljiv sa 3 po pretpostavci

rugi sabirak: $3u^2+3u+6=3(u^2+u+2)$, i to je deljivo sa 3.

$(u+1)$ je deljivo sa 3.

. $6^{2u}+3^{u+2}+3^u$, deljivo sa 11, $\forall u\in N$

(1): $6^2+3^3+3=36+27+3=66=6\cdot11$

$(u+1)$: $6^{2u+2}+3^{u+3}+3^{u+1}=36\cdot6^{2u}+3\cdot3^{u+2}+3\cdot3^u$

$$=36\cdot6^{2u}+36\cdot3^{u+2}-33\cdot3^{u+2}+36\cdot3^u-33\cdot3^u$$

$$=36(6^{2u}+3^{u+2}+3^u)-33\cdot(3^{u+2}+3^u)$$

rvi sabirak je deljiv sa 11 po pretpostavci, a drugi sabirak je deljiv sa 11

jer je broj -33 deljiv sa 11.
T(n+1) je deljivo sa 11.

5. $4^n+15n-1$, deljiv sa 9, $\forall n \in N$.

$T(1): 4+15-1=18=9\cdot 2$

$T(n+1): 4^{n+1}+15(n+1)-1 = 4\cdot 4^n+15n+15-1$

$= 4\cdot 4^n + 4\cdot 15n - 3\cdot 15n - 4 + 4 + 14$

$= 4(4^n+15n-1) - 45n + 18$

$= 4(4^n+15n-1) - 9(5n+2)$

Prvi sabirak je deljiv po pretpostavci, a i drugi sabirak je deljiv sa 9.
T(n+1), deljivo sa 9.

6. $2^n > 2n+1$, $\forall n \geq 3$

$n=3$ $T(3): 2^3 > 2\cdot 3+1$

$8 > 7$

$T(n+1): 2^{n+1} > 2(n+1)+1$

$2^{n+1} > 2n+3$

$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2(2n+1) = 4n+2 = 2n+2n+2$

$2n > 1$, $\forall n \in N$

$2^{n+1} > 2n+1+2 = 2n+3$

7. $x>0$ i $n \geq 2$, $n \in N$ $(1+x)^n > 1+nx$

$T(2): (1+x)^2 > 1+2x$

$1+2x+x^2 > 1+2x$, $x^2>0$

$T(n+1): (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot x$

$(1+x)^{n+1} > 1+nx+x$

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+x)(1+nx)$

$(1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x$, $nx^2 \geq 0$

o. 2. Kombinatorika

Permutacija bez ponavljanja je redosled n različitih elemenata tj. ure-
đena n-torka čije svake dve komponente su različite i pripadaju nekom
atom n-točlanom skupu.
Napomena: Permutacija se može definisati i kao bijekcija skupa u samog
be. Ove definicije nisu ekvivalentne, ali broj svih permutacija po bilo
oj od ovih definicija je isti.
Broj svih permutacija bez ponavljanja od n elemenata je:
$(n)=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n-1)\cdot n.$

ermutacija sa ponavljanjem od n elemenata, među kojima je k_1 istih,
istih, ... k_1 istih, pri čemu je $k_1+k_2+\ldots+k_1 \leq n$, jeste neki redosledi tih
emenata, tj. n-torka tih elemenata.
Broj svih permutacija sa ponavljanjem od n elemenata, među kojima je k_1
tih, k_2 stih, ..., k_1 istih, pri čemu je $k_1+k_2+\ldots+k_1 \leq n$ je
$_{,k_2,\ldots,k_1}(n)=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_1!}$

ombinacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase je svaki izbor k
zličitih elemenata od n zadatih, tj. bilo koji k-točlani podskup nekog
-točlanog skupa. Znači, redosled tih k elemenata nije bitan!
nači, kombinacije bez ponavljanja ćemo zapisivati tako što će desno od
vog elementa biti element koji je „veći od njega". Sada je jasno da se
mbinacija bez ponavljanja skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ k-te klase može definisati

kao uređena k-torka u kojoj je svaka sledeća komponenta veća od prethodne komponente, tj. rastuća funkcija skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup $\{1,2,\dots,n\}$.

- Broj svih kombinacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase je

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

* Kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase je svaki izbor k elemenata od n zadatih pri čemu se zadati elementi mogu ponavljati, tj. kombinacija sa ponavljanjem skupa $\{1,2,\dots,n\}$ k-te klase je uređena k-torka u kojoj je svaka sledeća komponenta veća od prethodne ili joj je jednaka ili neopadajuća funkcija skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup $\{1,2,\dots,n\}$.

- Broj kombinacija od n elemenata k-te klase sa ponavljanjem je:

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

* Varijacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase je bilo koji redosled k različitih elemenata od n zadatih, tj. uređena k-torka čije komponente su iz nekog n-točlanog skupa i svake dve komponente te k-torke su različite, tj. injektivna funkcija skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup $\{1,2,\dots,n\}$.

- Broj varijacija bez ponavljanja od n elemenata k-te klase je

$$V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

* Varijacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase je svaki poredak k elemenata od n zadatih, (elementi se mogu ponavljati.), odnosno bilo koja uređena k-torka čije komponente su iz nekog n-točlanog skupa, tj. proizvoljna funkcija skupa $\{1,2,\dots,k\}$ u skup $\{1,2,\dots,n\}$.

- Broj varijacija sa ponavljanjem od n elemenata k-te klase je $\overline{V}_k^n = n^k$

?. $P(4) = 4! = 24$

. $P_3(10) = \frac{10!}{3!} = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4 = 604800$

) 4 stolice (4s)
3 fotelje (3f)

) sfsfsfs

) $P(4) = 4! = 24$

) $P(3) = 3! = 6$

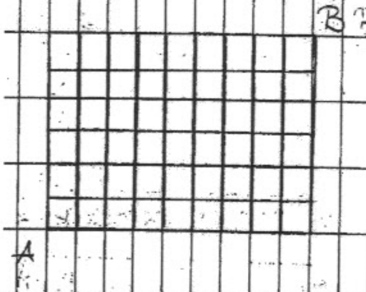
) $P(4)\cdot P(3) = 4!\cdot 3! = 24\cdot 6 = 144$

. A, B, C, D

a) $\bar{C}^4_{20} = \binom{4+20-1}{20} = \binom{23}{20} = \frac{23!}{20!\cdot3!} = \frac{23\cdot22\cdot21}{1\cdot2\cdot3} = 1771$

) $\bar{C}^4_{16} = \binom{4+16-1}{16} = \binom{19}{16} = \frac{19!}{16!\cdot3!} = \frac{19\cdot18\cdot17}{1\cdot2\cdot3} = 969$

2. 10 vertikalnih i 7 horizontalnih linija - pravougaona mreža



- 9 kolona od po 7 horizontalnih duži (h)
- 6 vrsta od po 10 vertikalnih duži (v)
- od A do B treba preći 9 horizontalnih i 6 vertikalnih duži. (15 simbola h i v - 9h i 6v)

$P_{9,6}(15) = \frac{15!}{9!\,6!}$ $\quad C^{15}_9 = \binom{15}{9} = \frac{15!}{9!\cdot6!}$

3. $C^6_3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$

14. $C_2^{10} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$

15. $C_3^{10} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

16. $C_2^{15} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = \frac{15\cdot 14}{2\cdot 1} = 105$

$C_4^{10} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$

$C_2^{15}\cdot C_4^{10} = 105\cdot 210 = 22050$

17. $V_5^9 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 15120$

18. $\overline{V}_5^9 = 9^5$

19. - 6 poprečnih puteva dele put na 7 deonica.
- s-deonice na starom putu n-deonice na novom putu
- moramo preći 7 deonica

$\overline{V}_2^7 = 2^7$

10.3. Binomna formula

- Binomna formula $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
- Binomni koeficijenti $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

20. $\binom{2x}{x+1} = \frac{2}{3}\binom{2x+1}{x-1}$

$$\frac{(2x)!}{(x+1)!(2x-x-1)!} = \frac{2}{3}\,\frac{(2x+1)!}{(x-1)!(2x+1-x+1)!}$$

$$\frac{\cancel{(2x)!}}{\cancel{(x-1)!}\,\cancel{(x+1)!}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\cancel{(2x)!}(2x+1)}{\cancel{(x-1)!}\,\cancel{(x+1)!}(x+2)}$$ 2

$$1 = \frac{2}{3}\,\frac{(2x+1)}{(x+2)}$$

$4x+2=3x+6$

$x=4$

21. $(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{n}x^n$

$\binom{n}{2}x^2=10x^2$

$\binom{n}{2}=10$

$$\frac{\cancel{(n-2)!}(n-1)\cdot n}{\cancel{(n-2)!}\,2!}=10$$

$$\frac{(n-1)\cdot n}{2}=10$$

$n^2-n-20=0$ 2

$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{\overset{9}{1+80}}}{2} \begin{matrix}\nearrow n_1=5\\ \searrow \cancel{n_2=-4}\end{matrix}$$

$n=5$

22. $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^6=\left(x^{-1}+x^{\frac{1}{2}}\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{-(6-k)}\cdot x^{\frac{k}{2}}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{\frac{3k}{2}-6}$

$\frac{3k}{2}-6=0$

$\frac{3k}{2}=6$

$3k=12$

$k=4$

Peti član u razvoju binoma ne sadrži k

$\binom{6}{k}x^0=15$

23. $\left(\frac{1}{x}+x\right)^n$

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=22$

$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=22$

$2+2n+n^2-n=44$

$n^2-n-42=0$

$n_{1,2}=\frac{-1\pm\overset{13}{\sqrt{1+168}}}{2} \rightarrow \cancel{n_1=-7}$

$\rightarrow n_2=6$

$\left(\frac{1}{x}+x\right)^6=\left(x^{-1}+x\right)^6=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{-(6-k)}x^k=\sum_{k=0}^{6}x^{2k-6}$

$2k-6=0$

$2k=6$

$k=3$

Četvrti član u razvoju binoma ne sadrži x

24. $\left(\frac{y}{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^n$

$\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+5$

$\frac{n(n-1)}{2}=n+5$

$n^2-n=2n+10$

$n^2-3n-10=0$

$n_{1,2}=\frac{3\pm\overset{7}{\sqrt{9+40}}}{2} \rightarrow n_1=5$

$\rightarrow \cancel{n_2=-2}$

$\left(\frac{y}{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{\frac{5k}{3}-5}y^{5-k}$

$\frac{5k}{3}-5=0$

$\frac{5k}{3}=5$

$5k=15$

$k=3$

Četvrti član u razvoju binoma ne sadrži x i iznosi $10y^2$.

10. 4 Zadaci za vežbu

1. $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in N$

$T(1) \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad T$

$T(n+1) = \quad 1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad *$

$$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad *$$

2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \ n \in N$

$T(1) = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad T$

$T(n+1) \ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$

$T(n+1) \ \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} \quad T$$

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$, $\forall n \geq 2$

$T(2)$: $\frac{1}{2}=\frac{2^1-1}{2^1}=\frac{1}{2}$ T

$T(n+1)$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ *

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}^{|\cdot 2}+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{2^n-2}{2^n}+\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{2^n-2+1}{2^n}$$

$$=\frac{2^n-1}{2^n} \ *$$

4. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $\forall n \in N$

$T(1)$: $1^3=\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2=1^2=1$ T

$T(n+1)$: $1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ *

$$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \ *$$

5. $n^3 - n + 6$, deljivo sa 6, $\forall n \in N$.

T(1): $1^3 - 1 + 6 = 6 = 6 \cdot 1$ T

T(n+1): $(n+1)^3 - (n+1) + 6 = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n - \cancel{1} + 6$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n - n + 6$$

$$= (n^3 - n + 6) + 3(n^2 + n)$$

Prvi sabirak je deljiv po pretpostavci

-Drugi sabirak je deljiv sa 3

6. $6^{2n} + 10 \cdot 3^n - 11$, deljivo sa 11, $\forall n \in N$.

T(1): $6^2 + 10 \cdot 3^1 - 11 = 36 + 30 - 11 = 55 = 11 \cdot 5$ T

T(n+1): $6^{2(n+1)} + 10 \cdot 3^{n+1} - 11 = 6^{2n+2} + 10 \cdot 3^{n+1} - 11$

$$= 36 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 10 \cdot 3^n - 11$$

$$= 36 \cdot 6^{2n} + 36 \cdot 10\, 3^n - 33 \cdot 10 \cdot 3^n - 36 \cdot 11 + 35 \cdot 11$$

$$= 36 \cdot (6^{2n} + 10 \cdot 3^n - 11) - 11(3 \cdot 10 \cdot 3^n + 35)$$

-Prvi sabirak je deljiv sa 11 po pretpostavci.

-Drugi sabirak je deljiv sa 11.

7. $11^{n+1} + 12^{2n-1}$, deljivo sa 133, $\forall n \in N$

T(1): $11^2 + 12 = 121 + 12 = 133 = 133 \cdot 1$ T

T(n+1): $11^{n+2} + 12^{2(n+1)-1} = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$

$$= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1}$$

$$= 144 \cdot 11^{n+1} - 133 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1}$$

$$= 144(11^{n+1} + 12^{2n-1}) - 133 \cdot 11^{n+1}$$

-Prvi sabirak je deljiv sa 133 po pretpostavci.

- Drugi sabirak je deljiv sa 133.

8. $3^{2n+2}-8n-9$, deljivo sa 64, $\forall n\in N$.

$T(1)$: $3^4-8-9=81-8-9=64=64\cdot 1$ T

$T(n+1)$: $3^{2(n+1)+2}-8(n+1)-9=3^{2n+4}-8n-8-9$

$=9\cdot 3^{2n+2}-9\cdot 8n+8\cdot 8n-9\cdot 9+64$

$=9\cdot\left(3^{2n+2}-8n-9\right)+64(n+1)$

- Prvi sabirak je deljiv sa 64 po pretpostavci.
- Drugi sabirak je deljiv sa 64.

9. $2^n>n^2$, $\forall n\geq 5$

$T(5)$: $2^5>5^2$

$32>25$ T

$T(n+1)$: $2^{n+1}>\underline{(n+1)}^2$

$2^{n+1}>\underline{n^2+2n+1}$

$2\cdot 2^n>\underline{2n^2}$ (prvobitni izraz pomnožen dvojkom)

- Ako je $2n^2>(n+1)^2$ za $n\geq 5$, onda je $2^{n+1}>(n+1)^2$

$2n^2>(n+1)^2$ za $n\geq 5$

$T(5)$: $2\cdot 25>6^2$

$50>36$ T

$T(n+1)$: $2(n+1)^2>(n+2)^2$

$2(n^2+2n+1)>n^2+4n+4$

$2n^2+4n+2>n^2+4n+4$

10. $P(4)=4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$

$\underset{4}{\underline{\quad\quad}}\quad\underset{3}{\underline{\quad\quad}}\quad\underset{2}{\underline{\quad\quad}}\quad\underset{1}{\underline{\quad\quad}}$

11. 0, 1, ..., 9

a) $9\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 90000$

b) $9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 27216$

12. $2!\cdot5!\cdot5!$

3. $n=4$

$(n-1)! = 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6$

4. $\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{2} = \frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{5!}{2!\,3!}\cdot\frac{6!}{2!\,4!}$

$= \frac{\cancel{2!}\cdot3}{\cancel{2!}}\cdot\frac{\cancel{3!}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot5}{\cancel{3!}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4!}\cdot5\cdot6}{\cancel{4!}\cdot2}$

$= 3\cdot10\cdot15 = 450$

5. $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1} = \frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{4!}{3!\,1!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{4!}{1!\,3!}$

$= \frac{\cancel{2!}\cdot3\cdot\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3!}\cdot4}{\cancel{3!}\cdot1}\cdot\frac{\cancel{2!}\cdot3\cdot\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3!}\cdot4}{\cancel{3!}\cdot1}$

$= 6\cdot4\cdot6\cdot4 = 576$

6. 2 _ _ 7

$10\cdot10 = 100$

_ _ 0 $\quad 9\cdot10\cdot2 = 180$

_ _ 5

18. 3000 - 6000

3 _ _ 3   4 _ _ 3   5 _ _ 3

3 _ _ 7   4 _ _ 7   5 _ _ 7

$3\cdot10\cdot10\cdot2=600$

19. 1 - 18

- Podelimo sve brojeve sa 3.

I grupa - bez ostatka	II grupa - ostatak 1	III grupa - ostatak 2
3	1	2
6	4	5
9	7	8
12	10	11
15	13	14
18	16	17

- Zbir ostataka mora biti deljiv sa 3.
- Broj kombinacija elemenata iz jedne od tri grupe je:

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{\cancel{3!}\cdot4\cdot5\cdot6}{\cancel{3!}\,1\cdot2\cdot3}=\frac{\cancel{4}^{2}\,5\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}=20$$

- Broj kombinacija elemenata iz sve tri grupe (pri čemu se kombinuju samo elementi iz iste grupe) je $3\cdot20=60$
- Broj kombinacija elemenata iz sve tri grupe pri čemu se međusobno kombinuju elementi iz I, II i III grupe je $6\cdot6\cdot6=216$.
- Ukupan broj kombinacija je: $60+216=276$.

20. 20 XX → 5 XX $\binom{20}{5}\cdot\binom{10}{3}$

10 XY → 3 XY

$$12\binom{x}{1}+\binom{x+4}{2}=96 \quad, x\in N$$

$$12\cdot\frac{x!}{(x-1)!\cdot 1!}+\frac{(x+4)!}{2!\,(x+2)!}=96$$

$$12\cdot\frac{\cancel{(x-1)!}\,x}{\cancel{(x-1)!}\cdot 1}+\frac{\cancel{(x+2)!}\,(x+3)(x+4)}{2\,\cancel{(x+2)!}}=96$$

$$12x+\frac{x^2+4x+3x+12}{2}=96$$

$$24x+x^2+7x+12=192$$

$$x^2+31x-180=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{961+720}}{2} \quad 41$$

$$x_{1,2}=\frac{-31\pm\sqrt{1681}}{2} \to x_1=5 \qquad \to \cancel{x_2=-36} \quad x\in N$$

$$x=5$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=46$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$1+\frac{n!}{(n-1)!\,1!}+\frac{n!}{(n-2)!\,2!}=46$$

$$1+\frac{\cancel{(n-1)!}\,n}{\cancel{(n-1)!}\cdot 1}+\frac{\cancel{(n-2)!}\,(n-1)\cdot n}{\cancel{(n-2)!}\,2}=46$$

$$1+n+\frac{n^2-n}{2}=46$$

$$2+2n+n^2-n-92=0$$

$$n^2+n-90=0$$

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2} \overset{19}{} \to n_1=9 \qquad \to \cancel{n_2=-10}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\left(x^2\right)^{9-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{18-2k} \cdot x^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{18-3k}$$

$18 - 3k = 0$

$3k = 18$

$k = 6$

Sedmi član ne sadrži x.

23. $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{5-k} \cdot \left(y x^{-\frac{1}{2}}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot x^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}k} \cdot y^k \cdot x^{-\frac{1}{2}k}$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot x^{\frac{5}{3}-\frac{5}{6}k} \cdot y^k$$

$\frac{5}{3} - \frac{5}{6}k = 0$

$\frac{5}{6}k = \frac{5}{3}$

$k = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}}$

$k = 2$

Treći član ne sadrži x

24. $\left(\frac{1}{4x} - 2x^2\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4} x^{-1}\right)^{12-k} \left(-2x^2\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} x^{k-12} (-2)^k \cdot x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{12-k} \cdot (-2)^k \cdot x^{3k-12}$$

$k - 12 = 3$

$k = 15$

$= 5$

$\binom{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot (-2)^5 = 792 \cdot 2^{-14} \cdot (-2)^5 = 792 \cdot (-1)^5 \cdot 2^{-9}$

$= -\frac{792}{512}$

$\boxed{= -\frac{99}{64}}$

$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{\cancel{7!} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{\cancel{7!} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$

5. $\left(\frac{1}{x \cdot \sqrt[15]{x^{13}}} + \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{y}\right)^n$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 79$

$1 + n + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 79$

$2 + 2n + n^2 - n - 158 = 0$

$n^2 + n - 156 = 0$

$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \overset{25}{\sqrt{1+624}}}{2} \nearrow n_1 = 12 \searrow \cancel{n_2 = -13}$

$\left(\frac{1}{x \sqrt[15]{x^{13}}} + \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{y}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(\frac{1}{x \cdot x^{\frac{13}{15}}}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{x \cdot x^{\frac{1}{3}}}{y}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12-k} \cdot x^{\frac{4}{3}k} \cdot y^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{-\frac{112}{5} + \frac{28}{15}k} \cdot x^{\frac{4}{3}k} \cdot y^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{-\frac{112}{5} + \frac{16}{5}k} \cdot y^{-k}$

$\frac{112}{5} + \frac{16}{5}k = 0$

$\frac{16}{5}k = \frac{112}{5}$

$= \frac{112}{16} = 7$

$$\binom{12}{7}\cdot y^{-7}=\frac{12!}{7!\,5!}\cdot y^{-7}$$

$$=\frac{\cancel{7!}\cdot\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\overset{3}{\cancel{9}}\cdot\overset{2}{\cancel{10}}\cdot 11\cdot\overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{7!}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{5}}\cdot y^{-7}$$

$$=792\cdot y^{-7}$$

26. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^{n}$

$\binom{n}{1}:\binom{n}{2}=2:11$

$11\binom{n}{1}=2\binom{n}{2}$

$11n=\cancel{2}\cdot\frac{n^2-n}{\cancel{2}}$

$n^2-n-11n=0$

$n^2-12n=0$

$n(n-12)=0$

$\cancel{n=0}\ \vee\ n=12$

$\binom{12}{4}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{8}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^{4}=$

$=495\cdot x^{8}\cdot y^{-4}\cdot y^{2}\cdot x^{-4}$

$=495\cdot x^{4}\cdot y^{-2}$

27. $\sqrt{5}\left(\left(2-\sqrt{5}\right)^{8}-\left(2+\sqrt{5}\right)^{8}\right)=$

$=\sqrt{5}\left(\binom{8}{k}2^{8-k}\cdot\left(-\sqrt{5}\right)^{k}-\binom{8}{k}2^{8-k}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{k}\right)=$

$=\sqrt{5}\left(\binom{8}{k}2^{8-k}(-1)^{k}\left(\sqrt{5}\right)^{k}-\binom{8}{k}2^{8-k}\left(\sqrt{5}\right)^{k}\right)=$

$=\left(\sqrt{5}\right)^{1}\binom{8}{k}2^{8-k}\left(\sqrt{5}\right)^{k}\left((-1)^{k}-1\right)$

$=\left(\sqrt{5}\right)^{k+1}\binom{8}{k}2^{8-k}\left((-1)^{k}-1\right)$

- Ako je k paran broj, sledi da je $(-1)^k = 1 \Rightarrow 1-1=0$, pa je ceo izraz jednak nuli.

- Ako je k neparan broj, onda je $(\sqrt{5})^{k+1}$ $\sqrt{5}$ na paran broj, pa se dobija ceo broj, tako da ceo izraz predstavlja ceo broj.

28. $$\binom{10}{2}\binom{8}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} \cdot \frac{8!}{2!\,6!}$$
$$= \frac{\cancel{8!} \cdot 9 \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{8!} \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6!} \cdot 7 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{2}}$$
$$= 1260$$

30. 1 – 27

I ostatak je 0		II ostatak je 1		II ostatak je 2	
3	27	1	25	2	26
6		4		5	
9		7		8	
12		10		11	
15		13		14	
18		16		17	
21		19		20	
24		22		23	

- Da bi zbir bio deljiv sa tri, zbir ostataka mora biti deljiv sa tri.

$$3\cdot\binom{9}{3}=3\cdot\frac{9!}{3!\,6!}=\frac{\cancel{6!}\cdot 7\cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cdot 9}{\cancel{6!}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}}\cdot\cancel{3}=252$$

$$9^3=729$$

Konačno rešenje: $729+252=981$

33. $10\ 3^{2n+1}-24n-30$, deljivo sa 24, $\forall n\in N$.

$$T(1):\ 10\cdot 3^3-24-30=270-54=216=24\cdot 9\quad T$$

$$\begin{aligned}T(n+1):\ 10\cdot 3^{2(n+1)+1}-24(n+1)-30 &= 10\cdot 3^{2n+3}-24n-24-30\\ &=9\cdot 10\cdot 3^{2n+1}-9\cdot 24n+8\cdot 24n-9\cdot 30+8\cdot 30-2\\ &=9\cdot(10\cdot 3^{2n+1}-24n-30)+8(24n+30)-24\\ &=9\cdot(10\cdot 3^{2n+1}-24n-30)+8\cdot 3(8n+10)-24\\ &=9\cdot(10\cdot 3^{2n+1}-24n-30)+24(8n+9)\end{aligned}$$

- Prvi sabirak je deljiv po pretpostavci.
- Drugi sabirak je deljiv sa 24.

34. $$\binom{8}{5}\cdot\binom{9}{5}=\frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot\frac{9!}{5!\,4!}$$

$$=\frac{\cancel{5!}\cdot \overset{2}{\cancel{6}}\cdot 7\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{5!}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5!}\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\cdot 7\cdot \overset{2}{\cancel{8}}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{5!}\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}}$$

$$=56\cdot 126$$

$$=7056$$